Mathématiques pour l'économie et la gestion

Mickaël Lallouche

Université Lyon 2 – L1 SEG 2023-2024
mickael.lallouche@univ-lyon2.fr



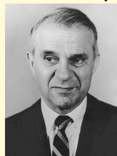
UFR DE SCIENCES
ÉCONOMIQUES
ET DE GESTION

CHAPITRE 3 :

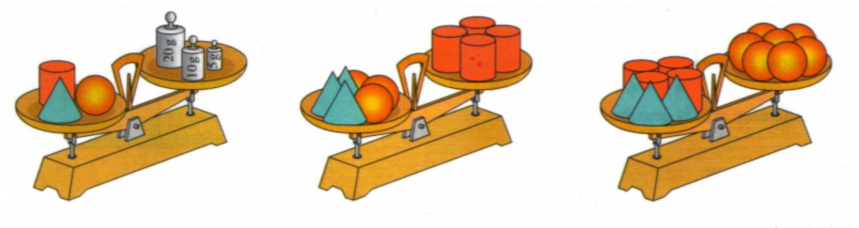
Systèmes et déterminants

Considérons une économie composée uniquement de deux secteurs A et B. Le secteur A produit de l'électricité et B produit des batteries. La demande des consommateurs pour ces produits est respectivement de 1000 et 780 millions d'euros par année. On sait de plus que le secteur B nécessite 10 centimes d'euro d'électricité par euro que B produit, et que l'industrie A a besoin de 20 centimes d'euro de biens de B par euro de production.

Quelles productions a et b (en millions d'euros) doivent fournir les deux secteurs pour satisfaire la demande ?



Wassily Leontief (1905–1999), prix Nobel d'économie en 1973



Donner le système associé à ce dessin.

Une entreprise produit deux types de bien : A et B.
Pour l'année qui vient, on estime qu'elle pourra produire 470 biens au total. Le profit par unité vendue est 300€ pour le bien A et 200€ pour le bien B.

Si la profit espéré pour la prochaine année est de 106 400 €, quel est le système qui donne les quantités de bien A et B à produire ?





Quel est le système qui permet d'équilibrer cette réaction chimique ?

- Calculer le déterminant d'un système linéaire.
- Résoudre un système linéaire par substitution ou par combinaison linéaire (pivots de GAUSS).
- Modéliser des situations de l'économie par des systèmes (éventuellement systèmes non linéaires).

Plan

1. PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants
   - I.1 - Généralités
   - I.2 - Matrices
   - I.3 - Déterminant
2. PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables
   - II.1 - Par substitution
   - II.2 - Par les pivots de GAUSS
3. PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires
4. BILAN

Sommaire

1 PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants
- I.1 - Généralités
- I.2 - Matrices
- I.3 - Déterminant

2 PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables

3 PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires

4 BILAN

Sommaire

1. PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants
   - I.1 - Généralités
   - I.2 - Matrices
   - I.3 - Déterminant
2. PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables
   - II.1 - Par substitution
   - II.2 - Par les pivots de GAUSS
3. PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires
4. BILAN

Équation linéaire

Definition

Une **équation linéaire** est une équation à une ou plusieurs inconnues formée de sommes de ces variables, à la puissance 1, chacune d'elle étant éventuellement multipliée par un coefficient.

Exemples :

- $3x + 1 = 0$
- $3x + 2y = 0$
- $3x + 2y - z = -6$
- $3x + 2y - z + w = 2021$

Contre-exemples :

- $3x^2 = 6$
- $3x + 2(y - z)^3 = \dfrac{-6}{x}$
- $3e^x + 2\ln(y) - z + w = 2021$

Definition

Un **système linéaire** est un ensemble d'équations linéaires.

Remarque : Dans ce chapitre, nous étudierons essentiellement les systèmes de 2 équations à 2 inconnues ou de 3 équations à 3 inconnues (dits systèmes carrés).

Exemple :

SYSTÈME 1

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

Système de 2 équations à 2 inconnues

SYSTÈME 2

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

Système de 3 équations à 3 inconnues

Exemple :

SYSTÈME 3

$$\begin{cases} 2x + y & = & 1 \\ 3x - y & = & 9 \\ 2x + y & = & -2 \\ -2023x + y & = & 0 \end{cases}$$

Système de 4 équations à 2 inconnues

SYSTÈME 4

$$\begin{cases} x + y + z & = & 3 \\ x - y + z & = & 1 \end{cases}$$

Système de 2 équations à 3 inconnues

Coefficients

Definition

Les **coefficients d'un système** sont les constantes multipliées aux variables.

Exemple : $\begin{cases} 2x + y & = & 1 \\ 3x - y & = & 9 \end{cases}$

Les coefficients du système sont

Coefficients

Definition

Les **coefficients d'un système** sont les constantes multipliées aux variables.

Exemple : $\begin{cases} 2x + y &= 1 \\ 3x - y &= 9 \end{cases}$

Les coefficients du système sont 2 et 1 sur la première ligne,

Definition

Les **coefficients d'un système** sont les constantes multipliées aux variables.

Exemple : $\begin{cases} 2x + y &= 1 \\ 3x - y &= 9 \end{cases}$

Les coefficients du système sont 2 et 1 sur la première ligne, 3 et -1 sur la deuxième ligne.

Définition

- La **solution d'un système à 2 inconnues est un couple** de valeurs $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que chaque équation du système devienne vraie lorsque qu'on remplace les inconnues par ces valeurs.
- La **solution d'un système à 3 inconnues est un triplet** de valeurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que chaque équation du système devienne vraie lorsque qu'on remplace les inconnues par ces valeurs.
- **Résoudre un système** c'est déterminer toutes les solutions du système.

Contre-exemple : $\begin{cases} 2x + y & = & 1 \\ 3x - y & = & 9 \end{cases}$

Le couple $(2, -1)$ n'est pas solution du système. En effet :

$$\begin{cases} 2 \times 2 + (-1) & \neq & 1 \\ 3 \times 2 - (-1) & \neq & 9 \end{cases}$$

Remarque : Il suffisait de vérifier qu'une seule des lignes n'était pas vérifiée pour affirmer que le couple $(2, -1)$ n'était pas solution.

Interprétation géométrique

On souhaite résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + y & = & 1 \\ 3x - y & = & 9 \end{cases}$$

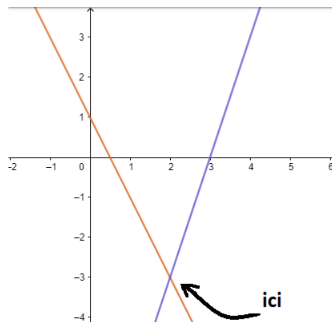
- Interprétation géométrique de la première ligne $2x + y = 1$?

On souhaite résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ 3x - y & = & 9 \end{array}\right.$$

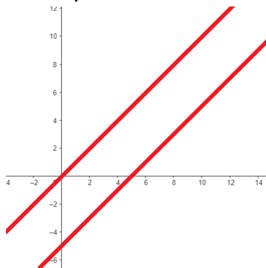
▶ Interprétation géométrique de la première ligne $2x + y = 1$? En réécrivant différemment, $y = 1 - 2x$: on reconnaît l'équation d'une droite.

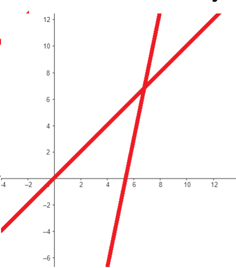
▶ De même pour la deuxième ligne : $3x - y = 9 \iff y = 3x - 9$. Et la solution du système apparaît :

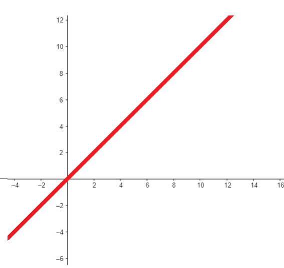


A partir de cet exemple avec 2 équations et 2 inconnues, on peut anticiper le nombre de solutions d'un système linéaire :

A partir de cet exemple avec 2 équations et 2 inconnues, on peut anticiper le nombre de solutions d'un système linéaire :

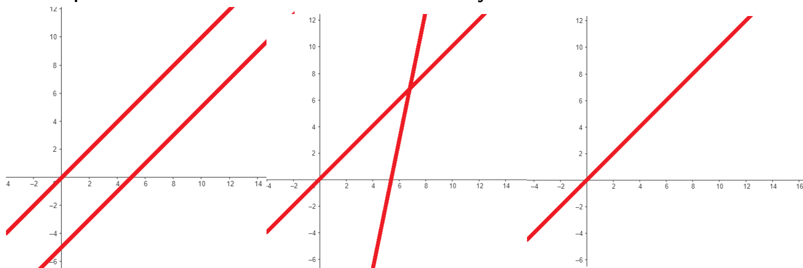






droites parallèles **droites sécantes** **droites confondues**

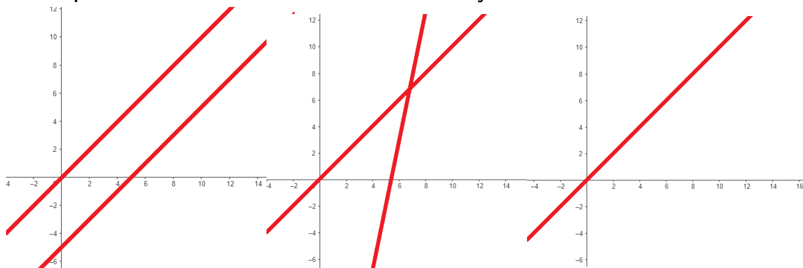
A partir de cet exemple avec 2 équations et 2 inconnues, on peut anticiper le nombre de solutions d'un système linéaire :



droites parallèles **droites sécantes** **droites confondues**

donc un système linéaire a toujours 0, 1 ou une infinité de solutions.

A partir de cet exemple avec 2 équations et 2 inconnues, on peut anticiper le nombre de solutions d'un système linéaire :



droites parallèles **droites sécantes** **droites confondues**

donc un système linéaire a toujours $\boxed{0}$, $\boxed{1}$ ou $\boxed{\text{une infinité}}$ de solutions.

On définira dans la suite un nombre qui permet de prédire le nombre de solutions d'un système.

Sommaire

1 PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants
- I.1 - Généralités
- I.2 - Matrices
- I.3 - Déterminant

2 PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables
- II.1 - Par substitution
- II.2 - Par les pivots de GAUSS

3 PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires

4 BILAN

Definition

Une **matrice** de taille $n \times p$ est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes.
Un **vecteur** est une matrice de taille $n \times 1$ (vecteur colonne) ou $1 \times p$ (vecteur ligne).

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ matrice carrée de taille 2×2,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ matrice rectangulaire de taille 2×3.

Opérations sur les matrices

- On peut **additionner** des matrices de même tailles :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

- On peut **multiplier une matrice par un nombre** :

$$-3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ -12 & -15 & -18 \end{pmatrix}$$

- On peut **multiplier une matrice de taille** $n \times p$ **avec une matrice de taille** $p \times r$ ce qui donne une matrice $n \times r$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 \\ 5 \times 1 + 4 \times 2 \\ 3 \times 1 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Origine du produit matriciel

Une pomme coûte 1 euro et une poire coûte 2 euros.

- Combien coûte mon panier si je prends 2 pommes et 3 poires ?
- Combien coûte mon panier si je prends 5 pommes et 4 poires ?
- Combien coûte mon panier si je prends 3 pommes et 1 poire ?



Origine du produit matriciel

Je décide de synthétiser tous ces résultats à l'aide de *matrices* :

- La matrice des paniers :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice des prix unitaires :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Et je veux définir une opération, que je note $\times$ et que j'appelle "multiplication de matrices" qui me donnera la matrice des prix de chaque panier :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

QUIZ : A VOUS DE JOUER



QUIZ : A VOUS DE JOUER

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est de taille : A) 2×3 B) 3×2

QUIZ : A VOUS DE JOUER

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est de taille : A) 2×3 B) 3×2
2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2023 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = ?$
   A) $\begin{pmatrix} 0 & 2026 & 5 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2028 \\ -1 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ C) N'est pas défini

QUIZ : A VOUS DE JOUER



3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ?$

A) $\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ C) N'est pas défini

QUIZ : A VOUS DE JOUER

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ?$$

   A) $\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ C) N'est pas défini

4. On peut trouver A et B deux matrices de taille 2×2 telles que $AB \neq BA$:

   A) VRAI B) FAUX

Matrice d'un système linéaire

Definition

La **matrice des coefficients** d'un système linéaire est le tableau formé des coefficients du système (les variables étant en général ordonnées dans l'ordre alphabétique).

Exemple : La matrice du système $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ 3x - y & = & 9 \end{array} \right.$

est

Definition

La **matrice des coefficients** d'un système linéaire est le tableau formé des coefficients du système (les variables étant en général ordonnées dans l'ordre alphabétique).

Exemple : La matrice du système $\begin{cases} 2x + y &= 1 \\ 3x - y &= 9 \end{cases}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Si l'on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur des variables et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$, alors on peut réécrire le système sous la forme matricielle suivante :

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y &= 1 \\ 3x - y &= 9 \end{cases}$$

Sommaire

1 PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants
- I.1 - Généralités
- I.2 - Matrices
- I.3 - Déterminant

2 PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables
- II.1 - Par substitution
- II.2 - Par les pivots de GAUSS

3 PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires

4 BILAN

Definition

Le **déterminant** de la matrice A des coefficients (ou déterminant du système) est un nombre qui renseigne sur le nombre de solutions du système linéaire. Il n'est défini que pour les systèmes **carrés**.
Le déterminant est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Propriété du déterminant

Soit A la matrice des coefficients d'un système carré. Alors :

- $det(A) \neq 0 \iff$ le système a une unique solution.
- $det(A) = 0 \iff$ le système n'a pas de solution ou bien en a une infinité.

Calcul du déterminant 2×2

Definition

Le déterminant du système S de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) :

$$\begin{cases} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{cases}$$

est le nombre noté $det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Exemple : Quel est le déterminant du système suivant ?

$$\begin{cases} 2x + y & = & 1 \\ 3x - y & = & 9 \end{cases}$$

Calcul du déterminant 2×2

Definition

Le déterminant du système S de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) :

$$\begin{cases} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{cases}$$

est le nombre noté $det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Exemple : Quel est le déterminant du système suivant ?

$$\begin{cases} 2x + y & = & 1 \\ 3x - y & = & 9 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5 \neq 0$$

Le système a donc

Calcul du déterminant 2×2

Definition

Le déterminant du système S de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) :

$$\begin{cases} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{cases}$$

est le nombre noté $det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Exemple : Quel est le déterminant du système suivant ?

$$\begin{cases} 2x + y & = & 1 \\ 3x - y & = & 9 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5 \neq 0$$

Le système a donc une unique solution.

Calcul du déterminant 3×3

Definition

Le déterminant du système S de taille 3×3 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & k \\ dx + ey + fz & = & l \\ gx + hy + iz & = & m \end{array}\right.$$

est le nombre noté $det(S) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Pour calculer ce déterminant, on va se ramener au calcul de plusieurs déterminants 2×2.

Calcul du déterminant 3×3

▶ **Règle des signes** : d'abord, on place un signe pour chaque coefficient de la matrice en commençant par $+$ en haut à gauche puis on alterne :

$$\begin{vmatrix} a^{+} & b^{-} & c^{+} \\ d^{-} & e^{+} & f^{-} \\ g^{+} & h^{-} & i^{+} \end{vmatrix}$$

▶ Ensuite, on fait un **développement selon une ligne ou une colonne**. Par exemple, effectuons le *développement selon la première ligne* :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad -b \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad +c \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Calcul du déterminant 3×3

- Autre possibilité : on peut par exemple développer selon la *2ème colonne* pour calculer le déterminant.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

$$= -b(di - gf) + e(ai - gc) - h(af - dc)$$

Exemple méthode

Que vaut le déterminant du système suivant ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y+6z & = & 18 \\ 2x-y+2z & = & 11 \\ 3x+4y-2z & = & -4 \end{array}\right.$$

Exemple méthode

Que vaut le déterminant du système suivant ?

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z & = & 18 \\ 2x - y + 2z & = & 11 \\ 3x + 4y - 2z & = & -4 \end{cases}$$

On fait un développement selon la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

QUIZ : A VOUS DE JOUER



QUIZ : A VOUS DE JOUER

1. Le couple $(1, -2)$ est solution du système

$$\begin{cases} 2x - 3y & = & 8 \\ 5x - 3y & = & 2 \end{cases}$$

A)VRAI

B) FAUX

QUIZ : A VOUS DE JOUER

1. Le couple $(1, -2)$ est solution du système

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 8 \\ 5x - 3y &= 2 \end{cases}$$

A)VRAI B) FAUX

2. Le triplet $(1, -1, 0)$ est solution du système :

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + z &= -1 \\ x - y - z &= 2 \end{cases}$$

A)VRAI B) FAUX

QUIZ : A VOUS DE JOUER

1. Le couple $(1, -2)$ est solution du système
   $$\begin{cases} 2x - 3y &= 8 \\ 5x - 3y &= 2 \end{cases}$$
   A)VRAI B) FAUX
2. Le triplet $(1, -1, 0)$ est solution du système :
   $$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + z &= -1 \\ x - y - z &= 2 \end{cases}$$
   A)VRAI B) FAUX
3. Que vaut le déterminant du premier système ?
   A) -21 B)+21 C)-9 D)+9

QUIZ : A VOUS DE JOUER

1. Le couple $(1,-2)$ est solution du système
$$\begin{cases} 2x-3y &= 8 \\ 5x-3y &= 2 \end{cases}$$
A)VRAI B) FAUX

2. Le triplet $(1,-1,0)$ est solution du système :
$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+2y+z &= -1 \\ x-y-z &= 2 \end{cases}$$
A)VRAI B) FAUX

3. Que vaut le déterminant du premier système ?
A) -21 B)+21 C)-9 D)+9

4. Après calculs, on a trouvé 7 solutions au système suivant
$$\begin{cases} x+y+z+w &= 0 \\ x+2y+z-2w &= -1 \\ x-y-z+w &= 2 \\ x-y-3z+w &= -7 \end{cases}$$
Qu'en pensez-vous ?
A) plausible B) impossible C) intéressant D) WHAT ?

Sommaire

1 PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants

2 PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables
- II.1 - Par substitution
- II.2 - Par les pivots de GAUSS

3 PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires

4 BILAN

Sommaire

1 PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants
- I.1 - Généralités
- I.2 - Matrices
- I.3 - Déterminant

2 PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables
- II.1 - Par substitution
- II.2 - Par les pivots de GAUSS

3 PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires

4 BILAN

Méthode 1 : résolution par substitution

On souhaite résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + y &= 1 \\ 3x - y &= 9 \end{cases}$

Méthode (Par substitution)

▶ **ETAPE 1 : Utiliser une ligne pour exprimer une variable en fonction d'une autre**

$$\begin{cases} {\color{red} y} &{\color{red} =} & {\color{red} 1 - 2x} \\ 3x - y &= & 9 \end{cases}$$

▶ **ETAPE 2 : On injecte la variable exprimée dans la deuxième équation**

$$\begin{cases} y &= & 1 - 2x \\ 3x - {\color{red}(1 - 2x)} &= & 9 \end{cases}$$

Méthode (Par substitution)

▶ **ETAPE 3 : On résout l'équation du premier degré obtenue**

La ligne 2 donne :

$3x-(1-2x)=9 \Longleftrightarrow 3x-1+2x=9 \Longleftrightarrow 5x=10 \Longleftrightarrow x=\frac{10}{5}=2$

▶ **ETAPE 4 : On remplace la valeur obtenue dans l'équation restante**

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1-2x = 1-2\times 2 = -3 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

La solution du système est donc $\boxed{(x,y)=(2,-3)}$.

On peut vérifier que $(2,-3)$ est bien solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\times 2-3 & = & 1 \\ 3\times 2-(-3) & = & 9 \end{array}\right.$$

Considérons le système suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} 3x+2y & = & -1 \\ 2x-3y & = & 8 \end{array}\right.$

1. Calculer le déterminant du système et en déduire le nombre de solutions.
2. Résoudre le système par substitution.

Avantages et inconvénients de la méthode par substitution

- La méthode de substitution est intuitive.
- Elle peut être utilisée pour la résolution de systèmes avec 2 inconnues.
- Lorsque le nombre d'inconnues est grand, le risque d'erreur en faisant de nombreuses substitutions est élevé et on préfèrera en général la méthode suivante (pivots de GAUSS) pour les systèmes comportant 3 inconnues ou plus.

Sommaire

1. PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants
   - I.1 - Généralités
   - I.2 - Matrices
   - I.3 - Déterminant
2. PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables
   - II.1 - Par substitution
   - II.2 - Par les pivots de GAUSS
3. PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires
4. BILAN

Pouvez-vous donner les solutions de ce système ?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ \quad\;\; y + z = 3 \\ \qquad\quad 2z = 4 \end{cases}$$

Pouvez-vous donner les solutions de ce système ?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ \qquad y + z = 3 \\ \qquad\quad 2z = 4 \end{cases}$$

Ce système est *triangulaire*. Il est facile de donner ses solutions en partant "du bas" (3ème ligne) :
$z = 2$ donc $y = 3 - z = 1$ donc $x = 5 - y - 2z = 0$.
Ainsi l'unique solution du système est $(0, 1, 2)$.

Principe des pivots de Gauss

La méthode de GAUSS consiste à "triangulariser" le système pour le rendre facile à résoudre à l'aide d'**opérations élémentaires** :

1. **l'échange entre deux lignes** : $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie qu'on permute les lignes i et j ;
2. **l'ajout d'une autre ligne** : $L_i \leftarrow L_i + L_j$ signifie qu'on remplace la ligne i par la somme des lignes i et j ;
3. **la multiplication par une constante non nulle** : $L_i \leftarrow \alpha L_i$ signifie qu'on multiplie tous les coeff. de la ligne i par $\alpha \neq 0$.

Remarques :

▶ Ces opérations transforment un système en un système équivalent qui a les mêmes solutions.

▶ Les opérations 2 et 3 peuvent être remplacées par une unique opération appelée "*combinaison linéaire*" :
$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ signifie que l'on remplace la ligne i par une combinaison linéaire des lignes i et j avec $\alpha \neq 0$ et β quelconque.

Méthode 2 : les pivots de GAUSS

On souhaite résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

Méthode (Par combinaison linéaire)

▶ **ETAPE 1 : On se sert de la 1ère ligne pour éliminer x, le pivot, des lignes en dessous**

$$\begin{cases} \boxed{2x} + y = 1 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 0x - 5y = 15 \end{cases}$$

▶ **ETAPE 2 : Le système est triangulaire. On trouve la valeur de y.**

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = \frac{15}{-5} = -3 \end{cases}$$

Méthode (Par combinaison linéaire)

▶ **ETAPE 3 : On injecte la valeur de y dans la 1ère ligne et on en déduit x.**

$$\begin{cases} 2x + (-3) & = & 1 \\ y & = & -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & \frac{1+3}{2} = 2 \\ y & = & -3 \end{cases}$$

La solution du système est donc $\boxed{(x, y) = (2, -3)}$.

Exemple avec 3 inconnues

On souhaite résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{x} & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & 3y & - & z & = & -3 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$$

Exemple avec 3 inconnues

On souhaite résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = 1 \\ -x + 3y - z = -3 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

x est le premier pivot et on va l'éliminer de toutes les autres lignes.

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1\ ;\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ \boxed{4y} + z = -2 \\ -5y - 3z = 2 \end{cases}$$

Exemple avec 3 inconnues

On souhaite résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{x} & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & 3y & - & z & = & -3 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$$

x est le premier pivot et on va l'éliminer de toutes les autres lignes.

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \;;\; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & \boxed{4y} & + & z & = & -2 \\ & & -5y & - & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

y est le 2ème pivot et on l'élimine des lignes en dessous.

$$\underset{L_3 \leftarrow 4L_3+5L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 4y & + & z & = & -2 \\ & & & & -7z & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 4y & + & z & = & -2 \\ & & & & z & = & \frac{2}{7} \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 4L_3+5L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 4y & + & z & = & -2 \\ & & & & -7z & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 4y & + & z & = & -2 \\ & & & & z & = & \frac{2}{7} \end{array} \right.$$

Le système est triangulaire. Il n'y a plus qu'à "remonter" les lignes pour trouver la valeur de z, y puis x.

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & & & = & \frac{-2-z}{4} = -\frac{4}{7} \\ & & & & z & = & \frac{2}{7} \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & 1 - y - 2z = 1 \\ & y & & = & -\frac{4}{7} \\ & & z & = & \frac{2}{7} \end{array} \right.$$

Donc l'unique solution du système est $(x, y, z) = (1, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$.

EXERCICE

Considérons le système $\mathcal{S}$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

1. Calculer le déterminant du système et en déduire le nombre de solutions.
2. Résoudre le système par les pivots de GAUSS.

Sommaire

1 PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants

2 PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables

3 PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires

4 BILAN

Problème 1

Une entreprise produit deux types de bien : A et B.
Pour l'année qui vient, on estime qu'elle pourra produire 470 biens au total. Le profit par unité vendue est 300€ pour le bien A et 200€ pour le bien B.
Si le profit espéré pour la prochaine année est de 106 400 €, combien faut-il produire de biens A et de biens B ?

Problème 2 : outil pour l'optimisation de fonctions à 2 variables

On estime que le coût moyen de production pour une quantité x d'un objet A et d'une quantité y d'un objet B est donnée en euros par :

$$C(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y + 1$$

Déterminer le minimum de cette fonction.

Problème 2 : outil pour l'optimisation de fonctions à 2 variables

On estime que le coût moyen de production pour une quantité x d'un objet A et d'une quantité y d'un objet B est donnée en euros par :

$$C(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y + 1$$

Déterminer le minimum de cette fonction.

On anticipe sur la suite.
Les dérivées "partielles" sont $\partial_x f(x,y) = 2x - y - 1$ et $\partial_y f(x,y) = -x + 2y - 1$.

Il n'y a pas de théorie générale pour la résolution des systèmes non linéaires. On les traitera au cas par cas :

Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 + 3y^2 & = & 0 \\ 6 + 6xy & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemple de systèmes non linéaires

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y^2 - 3y = 0 \end{cases}$$

Exemple de systèmes non linéaires

Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x^3 - 4y & = & 0 \\ 3y^3 - 3x & = & 0 \end{array} \right.$$

Sommaire

1 PARTIE I - Systèmes linéaires, matrices et déterminants

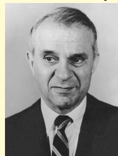
2 PARTIE II - Résolution de systèmes linéaires : 2 et 3 variables

3 PARTIE III - Application à l'économie - Exemples de systèmes non linéaires

4 BILAN

Considérons une économie composée uniquement de deux secteurs A et B. Le secteur A produit de l'électricité et B produit des batteries. La demande des consommateurs pour ces produits est respectivement de 1000 et 780 millions d'euros par année. On sait de plus que le secteur B nécessite 10 centimes d'euro d'électricité par euro que B produit, et que l'industrie A a besoin de 20 centimes d'euro de biens de B par euro de production.

Quelles productions a et b (en millions d'euros) doivent fournir les deux secteurs pour satisfaire la demande ?



Wassily Leontief (1905–1999), prix Nobel d'économie en 1973

COMPETENCES

- Calculer le déterminant d'un système carré à 2 ou 3 inconnues.
- Savoir résoudre un système linéaire à 2 équations et 2 inconnues par substitution et par combinaison linéaire.
- Savoir résoudre un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues par substitution et par combinaison linéaire.
- Savoir modéliser un problème issu de l'économie sous forme de système.
- Connaitre quelques exemples de résolution de systèmes non linéaires.

J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, ensemble, nous aurons 63 ans.

Mais quels sont nos âges ??

= 30

= 40

facebook.com/blowyourmind09

Bilson = 60

Bilson = ?

Exercice complémentaire : Enigme

+ = 13

- = 5

- = 2

+ + = ?

FIN CHAPITRE 3